

Facoltà di Ingegneria
1ª prova in itinere di Fisica II – 29.4.2004

Esercizio n.1

Tra due piani isolanti, indefiniti e paralleli, aventi densità di carica superficiale rispettivamente $+\sigma$ e -3σ , viene introdotta una lastra metallica neutra indefinita e di spessore δ .

Calcolare la densità di carica indotta sulle superfici S_1 ed S_2 della lastra metallica.

Con riferimento alla figura a fianco, calcolare il campo elettrico nelle regioni di spazio I, II, IV ed all'interno della lastra metallica (regione ombreggiata).

Note le distanze d_1 e d_2 , calcolare la differenza di potenziale tra i punti A e B e tra i punti A e C.

Rispondere quindi alle seguenti domande:

1. La carica indotta sulla superficie S_1 della lastra metallica vale:

A. $-\sigma$
B. -2σ (*)
C. -3σ
D. -4σ

2. La carica indotta sulla superficie S_2 della lastra metallica vale:

A. $+\sigma$
B. $+2\sigma$ (*)
C. $+3\sigma$
D. $+4\sigma$

3. Il campo elettrico nella Regione I ha modulo

A. 0
B. $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$ (*)
C. $\frac{3\sigma}{2\epsilon_0}$
D. $\frac{2\sigma}{\epsilon_0}$

4. Il campo elettrico nella Regione II ha modulo

A. 0
B. $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$
C. $\frac{3\sigma}{2\epsilon_0}$
D. $\frac{2\sigma}{\epsilon_0}$ (*)

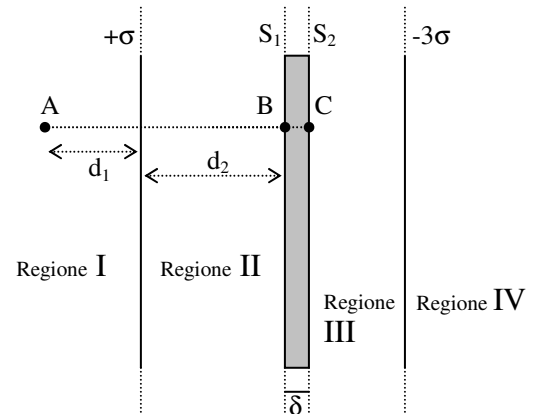
5. Il campo elettrico nella Regione III è un vettore

A. Ortogonale alla lastra, diretto verso destra e di modulo $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$
B. Ortogonale alla lastra, diretto verso sinistra e di modulo $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$
C. Ortogonale alla lastra, diretto verso destra e di modulo $\frac{3\sigma}{2\epsilon_0}$
D. Ortogonale alla lastra, diretto verso sinistra e di modulo $\frac{3\sigma}{2\epsilon_0}$

Risposta esatta: Ortogonale alla lastra, diretto verso destra e di modulo $\frac{2\sigma}{\epsilon_0}$

6. Il campo elettrico all'interno della lastra metallica ha modulo

A. 0 (*)
B. $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$
C. $\frac{3\sigma}{2\epsilon_0}$



D. $\frac{2\sigma}{\epsilon_0}$

7. La differenza di potenziale $V_A - V_B$ risulta:

A. 0

B. $\frac{\sigma}{\epsilon_0}(d_2 - d_1)$

C. $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}(d_2 + d_1 + \delta)$

D. $\frac{\sigma}{\epsilon_0}(d_1 + 2d_2)(*)$

8. La differenza di potenziale $V_A - V_C$ risulta:

A. 0

B. $\frac{\sigma}{\epsilon_0}(d_2 - d_1)$

C. $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}(d_2 + d_1 + \delta)$

D. $\frac{\sigma}{\epsilon_0}(d_1 + 2d_2)(*)$

Esercizio n.2

Nella combinazione dei condensatori della figura a fianco, le capacità valgono $C_1 = 3\mu\text{F}$, $C_2 = 2\mu\text{F}$, $C_3 = 4\mu\text{F}$. Il potenziale applicato tra i punti A e B è $V = V_A - V_B = 300\text{V}$.

Calcolare:

- la capacità totale del sistema
- la carica su ciascun condensatore
- la differenza di potenziale di ciascun condensatore
- l'energia elettrostatica del sistema

Rispondere quindi alle seguenti domande

9. La capacità totale del sistema vale:

A. 30 pF

B. 2 μF (*)

C. 40 μF

D. 10 mF

10. La carica sul condensatore C_1 vale

A. 200 μC

B. 400 μC

C. 600 μC (*)

D. 800 μC

11. La carica sul condensatore C_2 vale

A. 200 μC (*)

B. 400 μC

C. 600 μC

D. 800 μC

12. La carica sul condensatore C_3 vale

A. 200 μC

B. 400 μC (*)

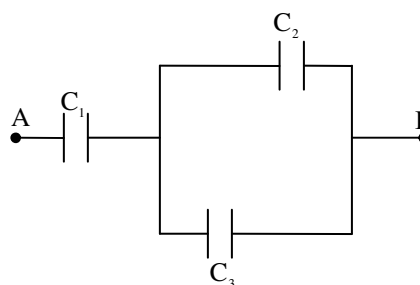
C. 600 μC

D. 800 μC

13. La differenza di potenziale del condensatore C_1 vale

A. 0 V

B. 100 V



- C. 200 V (*)
- D. 300 V

14. La differenza di potenziale del condensatore C_2 vale

- A. 0 V
- B. 100 V (*)
- C. 200 V
- D. 300 V

15. La differenza di potenziale del condensatore C_3 vale

- A. 0 V
- B. 100 V (*)
- C. 200 V
- D. 300 V

16. L'energia elettrostatica del sistema vale

- A. 0 J
- B. 45 mJ
- C. 75 mJ
- D. 90 mJ (*)

Esercizio n.3

Un filo isolante di lunghezza L è caricato uniformemente con una carica $+Q$. Il filo è piegato in modo da formare un quadrato (ABCD in figura).

Si calcoli:

- la densità lineare λ di carica del filo
- il campo elettrico nel centro del quadrato (punto O) dovuto alla carica sulla sola parte CD del filo
- il potenziale elettrico nel centro del quadrato (punto O) dovuto alla carica sulla sola parte CD del filo
- il campo elettrico nel centro del quadrato (punto O) dovuto alla carica Q del filo
- il potenziale elettrico nel centro del quadrato (punto O) dovuto alla carica Q del filo
- il lavoro esterno fatto per portare una carica $-Q$ dall'infinito al centro del quadrato lungo un cammino qualsiasi Γ_1 .

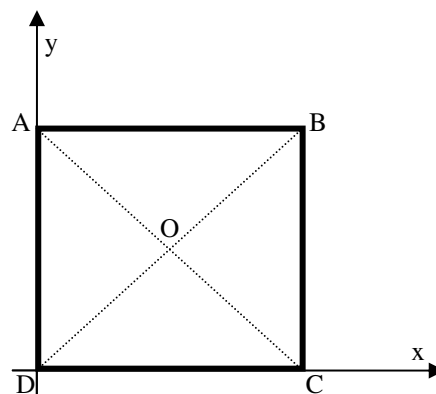
Nota: potrebbero essere utili i due integrali indefiniti

$$\int \frac{dx}{(a+x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a} \frac{x}{\sqrt{a+x^2}} + \cos t, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = \ln|x + \sqrt{a+x^2}| + \cos t$$

Si risponda quindi alle seguenti domande.

17. La densità lineare λ di carica del filo vale

- A. $\lambda = QL$
- B. $\lambda = \frac{Q}{L}$ (*)
- C. $\lambda = \frac{Q}{4L}$
- D. $\lambda = \frac{Q^2}{L}$



18. Il campo elettrico in O dovuto alla carica sulla parte CD di filo vale (\hat{x} ed \hat{y} sono i versori degli assi x e y)

- A. $\vec{E} = \frac{4\lambda}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 L} \hat{y}$ (*)
- B. $\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 L} \hat{y}$
- C. $\vec{E} = \frac{\lambda}{4\sqrt{2}\pi\epsilon_0 L} \hat{x}$
- D. $\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 L^2} \hat{x}$

19. Il potenziale elettrico in O dovuto alla carica sulla parte CD di filo vale

- A. $V_{CD} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln 2$

$$\begin{aligned} \text{B. } V_{\text{cd}} &= \frac{\lambda}{16\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \\ \text{C. } V_{\text{cd}} &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0\lambda} \ln \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ \text{D. } V_{\text{cd}} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} (*) \end{aligned}$$

20. Il campo elettrico in O dovuto alla carica sull'intero filo vale

$$\begin{aligned} \text{A. } \vec{E} &= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0 L} \hat{y} \\ \text{B. } \vec{E} &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 L} \hat{y} \\ \text{C. } \vec{E} &= \frac{4\lambda}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 L} \hat{x} \\ \text{D. } \vec{E} &= 0 (*) \end{aligned}$$

21. Il potenziale elettrico in O dovuto alla carica sul sull'intero filo vale

$$\begin{aligned} \text{A. } V &= \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} (*) \\ \text{B. } V &= \frac{\lambda}{16\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}} \\ \text{C. } V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0\lambda} \ln \frac{1}{\sqrt{2}-1} \\ \text{D. } V &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} \end{aligned}$$

22. Il lavoro esterno fatto per portare una carica $-Q$ dall'infinito al centro del quadrato lungo un cammino qualsiasi Γ_1 vale

$$\begin{aligned} \text{A. } W &= -\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{B. } W &= +\frac{Q^2}{16\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \text{C. } W &= -\frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} (*) \\ \text{D. } W &= +\frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} \end{aligned}$$

Altre domande:

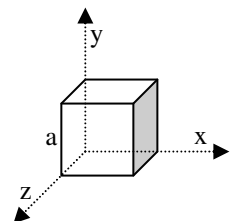
23. Trovare il flusso del campo elettrico attraverso la superficie del cubo di lato a della figura a lato, sapendo che il campo ha espressione $\vec{E} = cx^2\hat{x}$, con c costante

$$\begin{aligned} \text{A. } \Phi &= ca^2 \\ \text{B. } \Phi &= ca^3 \\ \text{C. } \Phi &= 4ca^3 \\ \text{D. } \Phi &= 8ca^3 \end{aligned}$$

risposta corretta $\Phi = ca^4$

24. Un guscio sferico conduttore, di raggio R , è caricato con carica $+Q$. Al suo centro il campo elettrico ha modulo

$$\begin{aligned} \text{A. } E &= 0 (*) \\ \text{B. } E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R} \\ \text{C. } E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \\ \text{D. } E &= \frac{1}{\epsilon_0} \frac{Q}{R^2} \end{aligned}$$



25. Due sfere conduttrici di raggi $R_1 < R_2$, posseggono entrambe una carica $+Q$. Le sfere vengono messe in contatto. La carica della sfera di raggio R_1 diventa:

- A. $Q_1 = Q/(R_1 + R_2)$
- B. $Q_1 = Q/2$
- C. $Q_1 = QR_1/(R_1 + R_2)$
- D. $Q_1 = QR_1/(R_1 + R_2)$

Risposta corretta: $Q_1 = 2QR_1/(R_1 + R_2)$

26. Sotto l'effetto di un campo elettrico, una particella di carica $+q$, partendo da ferma, si sposta da un punto A ad un punto B, con differenza di potenziale $V_A - V_B = V$. Nel punto B l'energia cinetica della particella vale

- A. $E_k = 0$
- B. $E_k = V$
- C. $E_k = +qV$ (*)
- D. $E_k = +qV^2/2$

27. Un campo vettoriale \vec{E} è conservativo se e solo se

- A. $\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) = 0$
- B. $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$
- C. $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ (*)
- D. $\vec{\nabla} E = 0$

28. Un dipolo elettrico di momento di dipolo \vec{p} in un campo elettrico \vec{E} è soggetto ad un momento meccanico

- A. $\vec{\tau} = \vec{E}/p$
- B. $\vec{\tau} = p\vec{E}$
- C. $\vec{\tau} = \vec{p} \cdot \vec{E}$
- D. $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ (*)

29. Un sistema di tre cariche, $q_1 = q_2 = q_3 = q$, poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato d , ha energia potenziale elettrostatica

- A. $U = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d}$ (*)
- B. $U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d^2}$
- C. $U = \frac{1}{3\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{d}$
- D. $U = \frac{9}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{d^2}$

30. Una carica $-Q$ è distribuita uniformemente su una sfera di raggio R . A distanza $r > R$ dal centro della sfera il potenziale elettrico ha espressione:

- A. $V = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2}$
- B. $V = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r}$
- C. $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$
- D. $V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}$ (*)

31. Una carica q viene spostata dal punto A al punto B di una stessa superficie equipotenziale (V_A e V_B indicano i potenziali dei punti A e B). Il lavoro fatto dal campo elettrico vale

- A. $W = 0$ (*)
- B. $W = qV_A$
- C. $W = qV_B$

D. $W = qV_B/V_A$

Soluzione

Esercizio n.1

Esistono vari modi per determinare la carica indotta sulle superfici S_1 ed S_2 della lastra metallica.

Utilizziamo ad esempio il teorema di Coulomb.

In assenza della lastra, il campo tra le due distribuzioni di cariche superficiali $+\sigma$ e -3σ è uniforme, ortogonale ai due piani e diretto verso destra (dal piano carico positivamente a quello carico negativamente). Applicando il principio di sovrapposizione e ricordando che il campo elettrostatico di una distribuzione superficiale di carica di densità $\pm\sigma$ ha

modulo $\frac{\sigma}{2\epsilon_0}$, il campo nella regione di spazio tra le due distribuzioni superficiali assegnate risulta avere modulo

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} = \frac{2\sigma}{\epsilon_0}$$

L'inserimento della lastra conduttrice non cambia il campo nelle regioni II e III (il campo non cambia direzione, né intensità essendo la lastra neutra); nella parte di spazio occupata dalla lastra, cioè all'interno del metallo, il campo diventa invece nullo. Applicando il teorema di Coulomb, che lega il campo in prossimità della superficie del conduttore alla densità di carica superficiale del

conduttore stesso ($\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}_n$, con \hat{u}_n versore normale alla

superficie del conduttore), si deduce che sulla superficie S_1 vi è una densità di carica superficiale pari a -2σ e che sulla superficie S_2 vi è una densità di carica superficiale uguale a $+2\sigma$.

Alla stessa conclusione si può arrivare imponendo che la lastra metallica sia neutra e che il campo al suo interno sia nullo.

Dette σ_1 e σ_2 le densità di carica indotta sulle superfici S_1 ed S_2 della lastra metallica, la condizione di neutralità implica:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = 0 \rightarrow \sigma_1 = -\sigma_2.$$

Inoltre è facile rendersi conto che la carica indotta sulla superficie S_1 deve essere negativa, quindi $\sigma_1 < 0$. Il valore assoluto di σ_1 può essere ottenuto imponendo che il campo elettrico all'interno della lastra metallica, che è la sovrapposizione dei campi elettrici delle distribuzioni di carica superficiali di densità $+\sigma, -\sigma_1, +\sigma_2, -3\sigma$, sia nullo:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u} - \frac{|\sigma_1|}{2\epsilon_0} \hat{u} - \frac{|\sigma_2|}{2\epsilon_0} \hat{u} + \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u} - \frac{|\sigma_1|}{2\epsilon_0} \hat{u} - \frac{|\sigma_1|}{2\epsilon_0} \hat{u} + \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \hat{u} = 0 \rightarrow$$

$$\frac{1}{2\epsilon_0} \hat{u} (4\sigma - 2|\sigma_1|) = 0 \rightarrow |\sigma_1| = 2\sigma$$

Per il principio di sovrapposizione, il campo elettrico nelle varie regioni indicate in figura è la risultante dei campi elettrici delle distribuzioni superficiali di carica, $+\sigma, -2\sigma, +2\sigma$ e -3σ :

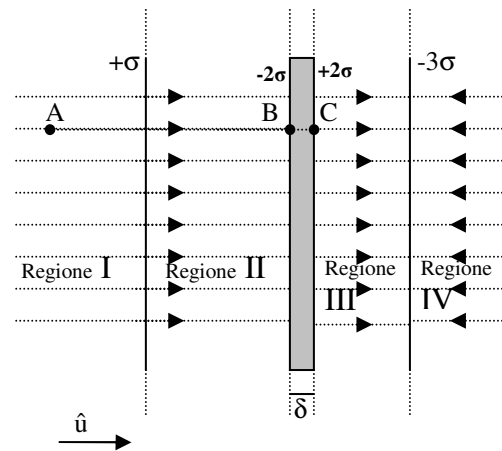
$$\text{Regione I: } \vec{E}_I = \left(-\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \right) \hat{u} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}$$

$$\text{Regione II: } \vec{E}_{II} = \left(+\frac{\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \right) \hat{u} = \frac{2\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}$$

$$\text{Regione III: } \vec{E}_{III} = \left(+\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \right) \hat{u} = \frac{2\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}$$

$$\text{Regione IV: } \vec{E}_{IV} = \left(+\frac{\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} + \frac{2\sigma}{2\epsilon_0} - \frac{3\sigma}{2\epsilon_0} \right) \hat{u} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{u}$$

dove \hat{u} è un versore ortogonale ai piani carichi con verso dal piano positivo a quello negativo.



Infine

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_A^D \vec{E}_I \cdot d\vec{s} + \int_D^B \vec{E}_{II} \cdot d\vec{s} = \int_A^D E_I ds + \int_A^D E_{II} \cdot ds = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d_1 + \frac{2\sigma}{\epsilon_0} d_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (d_1 + 2d_2)$$

Inoltre

$$V_A - V_B = V_A - V_C$$

essendo $V_C = V_B$ perché C e B sono punti sulla superficie (equipotenziale) di un conduttore.

Esercizio n.2

I condensatori C_2 e C_3 sono in parallelo; il condensatore ad essi equivalente C_{\parallel} è in serie col condensatore C_1 .

La capacità totale del sistema è quindi:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{\parallel}} \rightarrow C_{eq} = \frac{C_1 C_{\parallel}}{C_1 + C_{\parallel}} = \frac{C_1 (C_2 + C_3)}{C_1 + C_2 + C_3} = 2\mu F.$$

L'energia elettrostatica immagazzinata nei tre condensatori risulta

$$U = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 10^{-6} F \cdot 9 \cdot 10^4 V^2 = 0.09 J = 90 mJ$$

La carica sul condensatore C_{eq} è $Q = C_{eq} V = 2 \cdot 10^{-6} F \times 3 \cdot 10^2 V = 6 \cdot 10^{-4} C = 0.6 mC = 600 \mu C$. Questa è anche la carica sui condensatori in serie C_1 e C_{\parallel} .

La somma delle cariche Q_2 e Q_3 dei condensatori C_2 e C_3 deve essere uguale a Q ; inoltre i due condensatori, essendo in parallelo, hanno la stessa differenza di potenziale. Quindi

$$\begin{cases} Q_2 + Q_3 = Q \\ V_2 = V_3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q_2 + Q_3 = Q \\ \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} Q_2 = \frac{C_2}{C_2 + C_3} Q = 200 \mu C \\ Q_3 = \frac{C_3}{C_2 + C_3} Q = 400 \mu C \end{cases}$$

Infine la differenza di potenziale del condensatore C_1 vale

$$V_1 = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q}{C_1} = \frac{6 \cdot 10^{-4} C}{3 \cdot 10^{-6} F} = 200 V$$

mentre la differenza di potenziale di C_2 e di C_3 , che è la stessa, risulta

$$V_2 = V_3 = V - V_1 = 100 V$$

Esercizio n.3

La densità di carica del filo vale $\lambda = \frac{Q}{L}$.

Il campo elettrico $d\vec{E}$ nel punto O generato dalla carica sulla parte infinitesima dx del filo CD ha componenti (vedi figura):

$$dE_x = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{d^2} \cos \theta$$

$$dE_y = dE \sin \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{d^2} \sin \theta$$

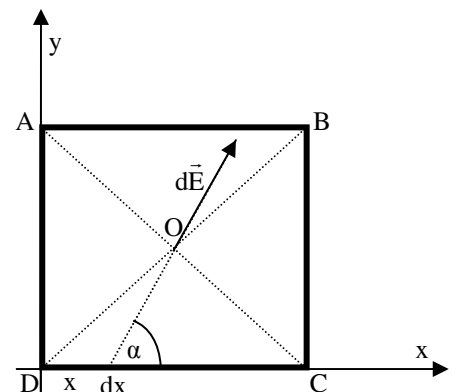
dove $\lambda dx = dq$ è la carica infinitesima sull'elemento di lunghezza infinitesima

dx e $d^2 = \left(\frac{L}{8}\right)^2 + \left(\frac{L}{8} - x\right)^2$ è il quadrato della distanza tra la carica

infinitesima dq ed il punto O.

Inoltre

$$\sin \theta = \frac{\frac{L}{8}}{d} = \frac{L}{8\sqrt{\left(\frac{L}{8}\right)^2 + \left(\frac{L}{8} - x\right)^2}}, \quad \cos \theta = \frac{\frac{L}{8} - x}{d} = \frac{L - 8x}{8\sqrt{\left(\frac{L}{8}\right)^2 + \left(\frac{L}{8} - x\right)^2}}$$



Le componenti $E_{CD,x}$ ed $E_{CD,y}$ del campo dovuto alla carica sulla parte CD del filo si ottengono integrando le espressioni di sopra:

$$E_{CD,x} = \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{d^2} \cos\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{dx}{\left(\frac{L}{8}\right)^2 + \left(\frac{L}{8} - x\right)^2} \cos\theta = \frac{\lambda}{32\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{(L-8x)dx}{\left(\left(\frac{L}{8}\right)^2 + \left(\frac{L}{8} - x\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = 0$$

(risultato prevedibile sulla base di considerazioni di simmetria)

$$E_{CD,y} = \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{d^2} \sin\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{dx}{\left(\frac{L}{8}\right)^2 + \left(\frac{L}{8} - x\right)^2} \sin\theta = \frac{L\lambda}{32\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{dx}{\left(\left(\frac{L}{8}\right)^2 + \left(\frac{L}{8} - x\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\lambda}{\sqrt{2}\pi\epsilon_0 L}$$

Analogamente per il potenziale nel punto O si ha:

$$V_{CD} = \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{d} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\frac{L}{4}} \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{L}{8}\right)^2 + \left(\frac{L}{8} - x\right)^2}} = -\frac{L\lambda}{32\pi\epsilon_0} \int_{\frac{L}{8}}^{\frac{L}{4}} \frac{dy}{\left(\left(\frac{L}{8}\right)^2 + (y)^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

Il campo elettrico dell'intero filo in O è la somma vettoriale dei campi elettrici in O generati dalle cariche sui fili AB, BC, CD e DA. Ma, per simmetria, $\vec{E}_{DA} = -\vec{E}_{BC}$ e $\vec{E}_{BA} = -\vec{E}_{CD}$, quindi $\vec{E}_{DA} + \vec{E}_{BC} + \vec{E}_{BA} + \vec{E}_{CD} = 0$

Ciascuna delle parti di filo produce in O un potenziale uguale a V_{CD} .

Il potenziale elettrico totale in O è quindi

$$V_O = V_{AB} + V_{BC} + V_{CD} + V_{DA} = 4V_{CD} = \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

Il lavoro esterno necessario per portare una carica $-Q$ dall'infinito alla posizione O è indipendente dal cammino seguito ed è uguale all'energia potenziale della carica nel punto O:

$$W_{\text{ext}} = U_O - U_\infty = U_O = -QV_O = -Q \frac{\lambda}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} = -\frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

Il lavoro fatto dal campo elettrico è uguale ed opposto al lavoro esterno

$$W_{\text{elettrico}} = U_\infty - U_O = -U_O = -(-QV_O) = \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$$

